

УДК 620.175.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

Г.Н. Албаут, М.Х. Ахметзянов, Н.В. Харина

Аннотация

Методом нелинейной фотоупругости исследованы геометрически и физически нелинейные задачи механики разрушения в области больших деформаций. Получены поля напряжений и деформаций при растяжении резиновых пластин или полос с внутренней трещиной. Задачи пластического деформирования в металлах решены методом фотоупругих покрытий. Приведены примеры исследования дюралюминиевой полосы с центральной трещиной-разрезом и шейки плоского стального образца. Отмечен ряд особенностей в распределении напряжений и деформаций в геометрически и физически нелинейных задачах.

Ключевые слова: механика разрушения, трещина, нелинейная фотоупругость, большие деформации, модель раскрытия трещин, сингулярная упругость, нелинейная механика твердого тела.

Введение

Изучение стадии предразрушения элементов конструкции при наличии больших пластических деформаций или трещин позволяет более объективно оценить их несущую способность, прочность и надежность. Комплексное решение проблем прочности и разрушения неминуемо приводит к необходимости полного и корректного исследования нелинейных эффектов, связанных как с заметным изменением конфигурации тела (геометрическая нелинейность), так и с проявлением пластичности (физическая нелинейность). Несмотря на успехи в создании новых мощных вычислительных машин, задачи нелинейной механики разрушения представляют особый класс задач, решение которых встречает серьезные математические трудности при применении как аналитических, так и численных методов.

В настоящей работе приведены результаты решения задач с геометрической и физической нелинейностью, полученные методом нелинейной фотоупругости [1, 2]. В качестве примера геометрически нелинейных задач изучено напряженное состояние при двухосном растяжении пластин с центральной трещиной-разрезом, полос при осевом растяжении с внутренней трещиной или боковыми надрезами. Пластины были изготовлены из полиуретанового каучука марки СКУ-6. Решение физически нелинейных задач, возникающих при исследовании напряжений предразрушения, получено методом фотоупругих покрытий в дюралюминиевой полосе с центральной трещиной-разрезом и в шейке плоского образца.

1. Теоретические аспекты метода нелинейной фотоупругости для исследования упругих задач в области больших деформаций

Математическая обработка экспериментальных данных проводилась в системах координат Эйлера и Лагранжа. Напряжения в системе координат Эйлера

представлены тензором истинных напряжений, отнесенных к деформированной площади (σ_1 и σ_2 – главные компоненты в плоскости образцов, σ_3 – в перпендикулярном направлении, $\sigma_3 = 0$, то есть исследуется плоское напряженное состояние), а в системе координат Лагранжа – симметричным тензором условных напряжений Био, отнесенных к недеформированной площади ($\sigma_1^L, \sigma_2^L, \sigma_3^L = 0$). Деформации в обеих системах координат представлены в виде кратностей удлинения ($\lambda_i = l_i/l_0$, $i = 1, 2, 3$ – главные кратности удлинения, λ_1 и λ_2 – в плоскости модели, а λ_3 – по толщине).

При исследовании плоских моделей напряженно-деформированное состояние при больших деформациях определяется пятью неизвестными: $\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Расшифровка экспериментальных данных с отдельным определением всех неизвестных называется **разделением** напряжений и деформаций.

В результате поляризационно-оптического эксперимента мы получаем **картину полос** интерференции с порядками полос, равными n , которые связаны с разностью главных погонных усилий $\lambda_3(\sigma_1 - \sigma_2)$ следующей зависимостью

$$\lambda_3(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\sigma_0^{1,0} n}{h_0}, \quad (1)$$

и **поле изоклин** с углами наклона главных напряжений Θ . Используя экспериментальные данные и зависимости

$$\lambda_3(\sigma_x - \sigma_y) = \lambda_3(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta, \quad \lambda_3\tau_{xy} = \lambda_3(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta, \quad (2)$$

можно получить выражения для $\lambda_3(\sigma_x - \sigma_y)$ и $\lambda_3\tau_{xy}$ в плоскости образца в любых требуемых точках модели:

В настоящей работе для расшифровки экспериментальных данных использовались дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи в системе координат Эйлера при отсутствии объемных сил в форме (3), когда учет толщины осуществлялся путем введения кратности удлинения λ_3 в поперечном направлении:

$$\frac{\partial(\lambda_3\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda_3\tau_{xy})}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\lambda_3\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda_3\sigma_y)}{\partial y} = 0;$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (4)$$

После численного интегрирования одного из дифференциальных уравнений равновесия (3) определяют главные погонные усилия $\lambda_3\sigma_1$ и $\lambda_3\sigma_2$, добавив к которым условие несжимаемости в форме (4) и два уравнения связи напряжений и деформаций, получим пять условий для определения пяти неизвестных ($\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$).

Основной физический закон упругости. Одной из основных проблем в нелинейной теории упругости является вопрос определения уравнений связи между компонентами тензора напряжений и деформаций. Для решения этого вопроса применен феноменологический подход с использованием различных упругих потенциалов. Ниже представлены некоторые наиболее известные упругие потенциалы:

1. Бартенева – Хазановича

$$U = C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3); \quad (5)$$

2. Муни – Ривлина

$$U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3); \quad (6)$$

3. Черныха

$$U = \frac{1}{C_2} \left[C_1 \left(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_2} - 3 \right) + C_3 \left(\lambda_1^{-C_2} + \lambda_2^{-C_2} + \lambda_3^{-C_2} - 3 \right) \right]; \quad (7)$$

4. Бидермана

$$U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1 - 3)^2 + C_4(I_1 - 3)^3. \quad (8)$$

Здесь C_i – константы, подлежащие определению, I_1, I_2, I_3 , – инварианты деформации.

С помощью упругих потенциалов (5)–(8) получены соответствующие уравнения связи напряжений и деформаций для плоской задачи:

1. Бартенева–Хазановича

$$\sigma_i = C(\lambda_i - \lambda_3); \quad (9)$$

2. Муни–Ривлина

$$\sigma_i = 2C_1(\lambda_i^2 - \lambda_3^2) + 2C_2\lambda_j^2(\lambda_i^2 - \lambda_3^2); \quad (10)$$

3. Черныха

$$\sigma_i = C_1 \left(\lambda_i^{C_2} - \lambda_3^{C_2} \right) - C_3 \left(\lambda_i^{-C_2} - \lambda_3^{-C_2} \right); \quad (11)$$

4. Бидермана

$$\sigma_i = [2C_1 + 2C_2\lambda_j^2 + 4C_3(I_1 - 3) + 6C_4(I_1 - 3)^2] (\lambda_i^2 - \lambda_3^2). \quad (12)$$

Тестовые испытания показали, что потенциалы (5), (6) и (8) описывают поведение изучаемой резины СКУ-6 при деформациях до 200% относительных удлинений, а потенциал (7) – только до 50%. Для обработки экспериментальных данных выбран потенциал Бартенева–Хазановича (5), как наиболее простой. Он хорошо описывает свойства резины СКУ-6, однако, как экспериментально установлено, не подходит для некоторых других резин [3].

Оптические зависимости. На основе анализа публикаций и проведенных экспериментов [1, 2] эмпирически установлено, что для большинства упругих пьезооптических материалов основной закон фотоупругости имеет вид

$$\delta = C_\sigma h_0 \lambda_3 (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (13)$$

Здесь δ – оптическая разность хода, C_σ – оптическая константа по напряжениям, h_0 – толщина недеформированного образца, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ – разность главных напряжений в плоскости модели. В этом законе изменение толщины образца так же, как и в уравнениях равновесия (1), учитывается путем введения величины λ_3 .

Оптико-деформационные зависимости определяются основным законом фотоупругости, принятым упругим потенциалом и соответствующими ему уравнениями связи. Последовательной подстановкой выражений (6)–(8) в (9) получим четыре соответствующих оптико-деформационных зависимости:

$$\delta = C_\sigma \lambda_3 h_0 C_1 (\lambda_1 - \lambda_2), \quad (14)$$

$$\delta = C_\sigma \lambda_3 h_0 (2C_1 + 2C_2\lambda_3^2) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \quad (15)$$

$$\delta = C_\sigma \lambda_3 h_0 \left[C_1 \left(\lambda_1^{C_2} - \lambda_2^{C_2} \right) - C_3 \left(\lambda_1^{-C_2} - \lambda_2^{-C_2} \right) \right], \quad (16)$$

$$\delta = C_\sigma \lambda_3 h_0 [2C_1 + 2C_2\lambda_3^2 + 4C_3(I_1 - 3) + 6C_4(I_1 - 3)^2] (\lambda_1^2 - \lambda_2^2). \quad (17)$$

В настоящем исследовании использовалась зависимость (14), соответствующая упругому потенциалу Бартенева–Хазановича (5).

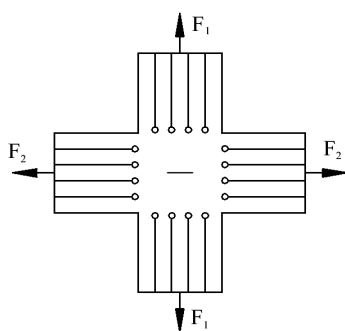
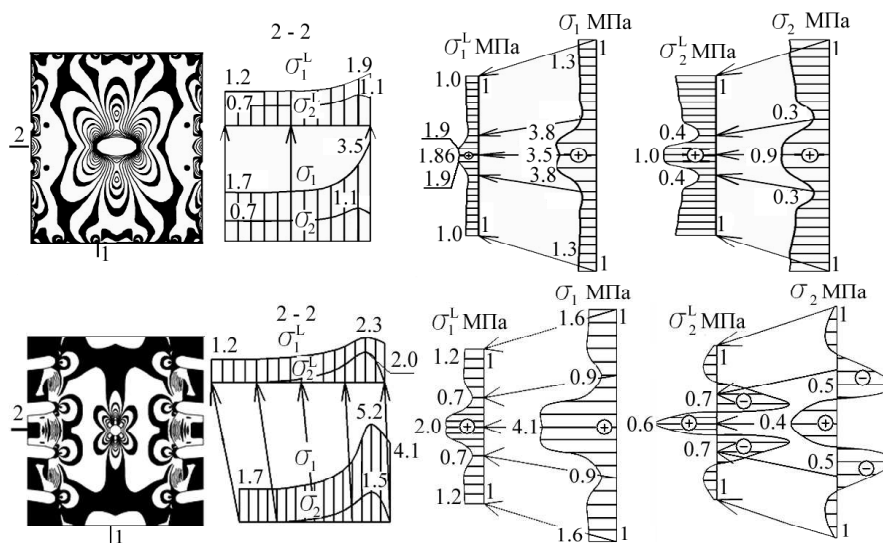


Рис. 1. Схема нагружения

Рис. 2. Картины полос интерференции в белом свете полярископа и эпюры истинных σ_1 , σ_2 и условных σ_1^L , σ_2^L напряжений при: а) двухосном ($\varepsilon_{\max} = 100\%$) и б) одноосном ($\varepsilon_{\max} = 220\%$) растяжении пластин

2. Двухосное растяжение резиновых пластин с центральной трещиной-разрезом

Получены поля напряжений и деформаций в системах координат Эйлера и Лагранжа при осевом и двухосном растяжениях резиновых пластин из эластомера СКУ-6 с горизонтальной трещиной-разрезом в центре, рис. 1 (размер рабочей части 40×40 мм, длина трещины 12 мм). Концы испытанного крестообразного образца разрезаны на несколько полос в направлении растяжения, чтобы обеспечить более равномерное поле деформаций в средней части. Максимальные деформации у вершин трещины достигали 220%. При этом трещины превращались в эллипс или круг в зависимости от уровня деформаций.

На основе поляризационно-оптических экспериментальных данных (картины полос интерференции и поля изоклин) по методике, описанной выше, с помощью метода численного интегрирования первого из уравнений (3) по нанесенной сетке выполнено полное разделение напряжений и деформаций по полю пластины.

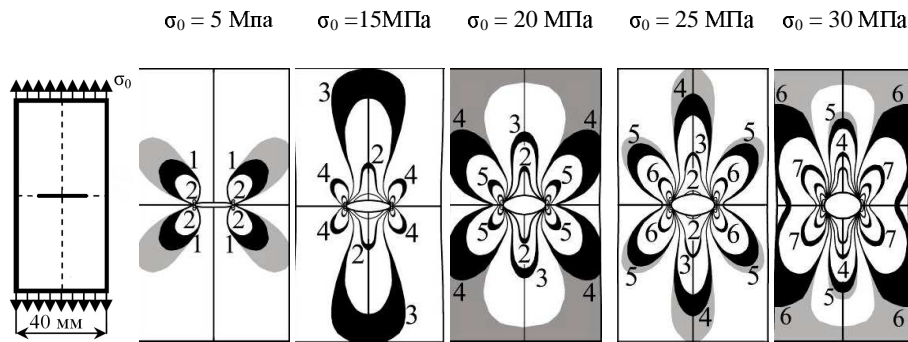


Рис. 3. Раскрытие трещины и картины полос интерференции при растяжении резиновой полосы с центральной горизонтальной трещиной-разрезом

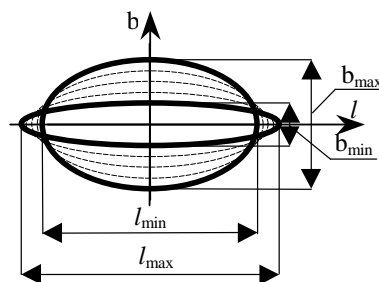


Рис. 4. Раскрытие трещины с ростом деформаций

На рис. 2, а приведены результаты двухосного растяжения пластины толщиной 3 мм при соотношении растягивающих сил $F_2 : F_1 = 1 : 2$, а на рис. 2, б – при $F_2 : F_1 = 0 : 1$ с толщиной 1.2 мм. В отмеченных сечениях построены эпюры истинных σ_1 и σ_2 и условных σ_1^L и σ_2^L напряжений.

На рис. 2, б (одноосное растяжение) можно отметить факт сдвижки максимума на эпюре σ_1 (напряжение в направлении основного растяжения) от вершины трещины вглубь образца по горизонтали, сечение 2–2. Максимальное значение σ_1 на этой эпюре составляет 5.16 МПа, а ближе к вершине равно 4.12 МПа, то есть значительно меньше (для условных напряжений соответствующие значения равны 2.309 и 2.011 МПа).

3. Растяжение полосы с внутренней трещиной

Резиновые полосы из полиуретана СКУ-6 с поперечным сечением 40×1.5 мм подвергались осевому растяжению. Схема нагружения представлена на рис. 3. Трещина-разрез пробивалась в середине образца острым пробойником длиной 12 мм, изготовленным из лезвия бритвы. Осевое растяжение полос с трещинами выполнялось в 15–20 этапов с регистрацией картин полос интерференции на каждом из них. На рис. 3 приведены картины интерференционных полос, полученных в светлом поле полярископа при различных уровнях нагружения образца.

На рис. 4 представлен анализ раскрытия трещины при растяжении образца. В процессе деформирования трещина постепенно раскрывалась, превращаясь в эллипс, и происходило затупление ее острых концов. Видно также, что с увеличением вертикальной оси трещины происходит уменьшение ее длины.

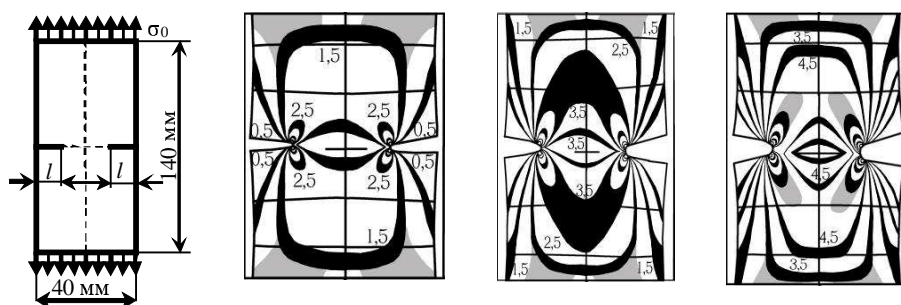


Рис. 5. Картины полос интерференции в полосах с боковыми надрезами $l = 10$ мм в светлом поле полярископа

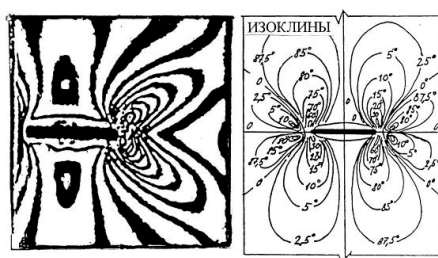


Рис. 6. Картина полос и поле изоклин

4. Растяжение полос с боковыми надрезами

Растяжению подвергались полосы из резины шириной 40 мм и толщиной 1,5 мм с симметричными боковыми надрезами, которые разрезались острым скальпелем. Схема нагружения образцов приведена на рис. 5. Глубина двусторонних надрезов составляла $l = 10$ мм. До начала растяжения надрезы считались закрытыми. Осевое растяжение полос с надрезами проводилось ступенями в несколько этапов.

С помощью поляризационно-оптического эксперимента получены фотографии картин полос интерференции на разных ступенях нагружения моделей в темном и светлом поле полярископа. Фрагменты некоторых из них для различного уровня нагружения и глубины выреза $l = 10$ мм приведены на рис. 5. При осевом растяжении образцов надрезы, постепенно раскрываясь, приобретали форму, близкую к параболе. Видно, что при увеличении нагрузки происходит раскрытие трещин и затупление их вершин. При этом чем больше глубина надреза, тем сильнее его раскрытие при одной и той же нагрузке. На фотографиях также отчетливо видно, что точки на контуре разрезов, в которых возникают максимальные контурные напряжения, сдвинуты от вершины трещины-концентратора в обе стороны вдоль свободного контура, то есть у вершины трещины не наблюдается не только бесконечно больших напряжений, но даже их максимальных значений.

5. Распределение напряжений предразрушения в дюралюминиевой полосе с трещиной-разрезом

Напряжения определены при растяжении дюралюминиевой полосы шириной 60 мм, толщиной 2 мм с центральной трещиной-разрезом 30 мм на последнем этапе нагружения методом фотоупругих покрытий (см. рис. 6) [1, 2]. Фотоупругое покрытие из полиуретана СКУ-6 наклеивалось на металлическую поверхность

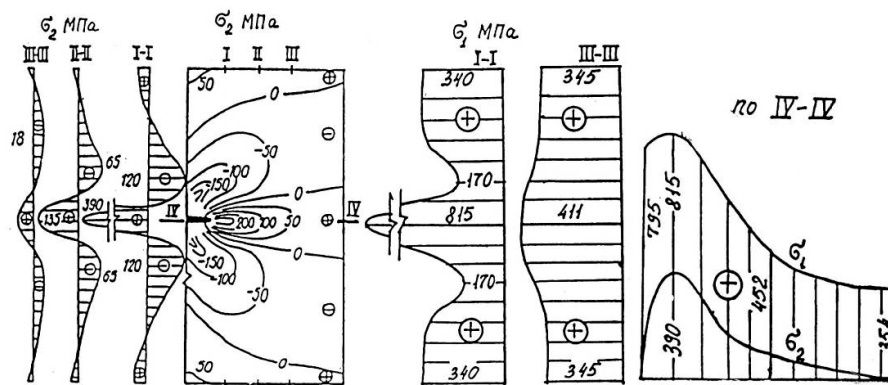


Рис. 7. Эпюры напряжений σ_1 и σ_2 и поле σ_2 в дюралюминиевой полосе с трещиной-разрезом

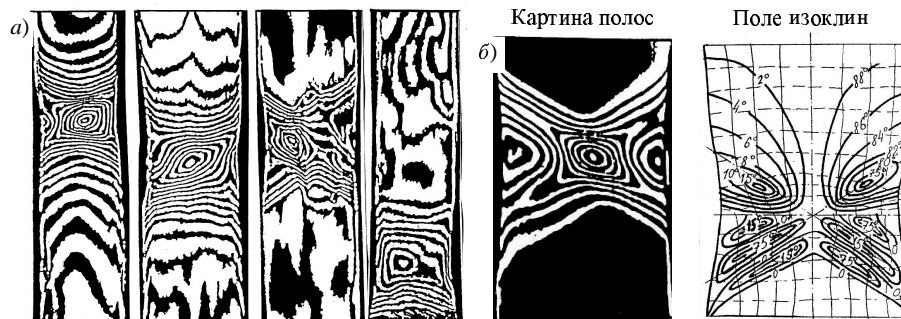


Рис. 8. Данные поляризационно-оптического эксперимента

модели и в процессе нагружения повторяло упруго-пластические деформации металла, при этом само деформировалось упруго. В результате поляризационно-оптического исследования металлических деталей получена картина полос интерференции в покрытии, фактически представляющая собой поле разности деформаций в некотором нелинейном масштабе, а также поле изоклин, горизонтали которых соединяют точки с одинаковыми углами наклона главных напряжений. В результате разделения напряжений и деформаций [2] получены поле главных напряжений σ_2 и эпюры σ_1 и σ_2 в нескольких сечениях (см. рис. 7). В зарубежных экспериментальных работах (см., например, [4]) возникает полемика о знаке второго главного напряжения вблизи вершины трещины при одноосном растяжении металлических образцов. Экспериментальные данные настоящего исследования показывают, что напряжения σ_2 по полю образца меняют знаки, их эпюры в вертикальных сечениях двузначны и волнообразны, как и в предыдущем примере с резиновой пластиной, что позволяет обеспечить самоуравновешенность внутренних усилий в вертикальных сечениях по сумме проекций всех сил на горизонтальную ось.

6. Определение напряжений и деформаций в шейке стального плоского образца

Задача о напряжениях и деформациях в шейке решена методом фотоупругих покрытий. В покрытии получены картины полос интерференции при ступенчатом

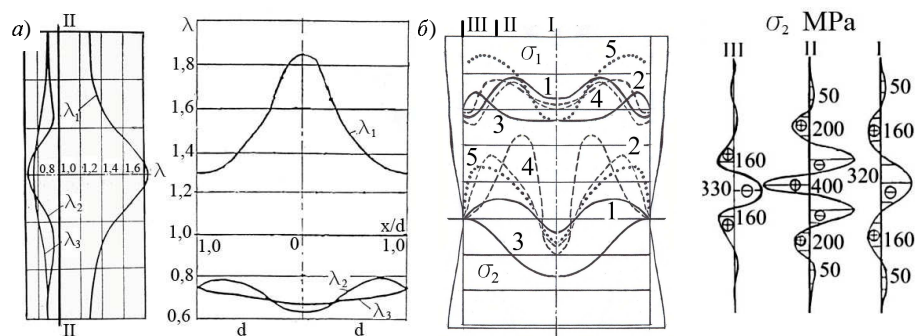


Рис. 9. Результаты экспериментального исследования шейки плоского стального образца: а) деформации в продольном и поперечном сечениях шейки; б) эпюры σ_1 и σ_2 в поперечном сечении шейки, определенные пятью способами; в) эпюры напряжений σ_2 в трех отмеченных вертикальных сечениях

нагружении. На рис. 8, а приведены четыре фотографии картин полос в шейке разных образцов при различных уровнях нагрузки. Разделение напряжений и деформаций выполнено с помощью картины полос интерференции и поля изоклин, показанных на рис. 8, б. При этом поле изоклин состоит из двух частей: сверху – поле изоклин деформаций, внизу – поле скоростей деформаций. Размеры поперечного сечения полосы из стали I составляют 100×10 мм.

Деформации в сечениях шейки (см. рис. 9, а), определены методом замера поперечных деформаций и методом разрезки покрытий [1, 2]. Напряжения определялись либо по известным деформациям, либо путем численного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия (3). На рис. 9, б в поперечном сечении шейки построены 5 эпюр напряжений, полученных разными методами. Использованы методы расшифровки, обозначенные цифрами на эпюрах: 1 – напряжения определены с помощью деформационной теории пластичности; 2 – с помощью теории течения; 3 – численным интегрированием уравнений (3) с использованием гипотезы о соосности напряжений и деформаций; 4 – численным интегрированием уравнений (3) с гипотезы о соосности напряжений и скоростей деформаций; 5 – независимым методом численного интегрирования одновременно двух дифференциальных уравнений (3).

Заключение

Экспериментально установлена модель раскрытия трещин: с ростом деформаций происходит затупление острых вершин трещин и боковых надрезов; трещины превращаются в эллипсы, а боковые надрезы приобретают форму параболы.

Отмечены некоторые общие закономерности в распределении напряжений предразрушения как в геометрически, так и в физически нелинейных задачах:

- максимальные значения первого главного напряжения σ_1 смещены от вершин трещины вглубь образцов;
- эпюры второго главного напряжения σ_2 в вертикальных сечениях двузначны и самоуравновешены по усилиям;
- максимальные значения контурных напряжений смещены от вершин трещин в обе стороны вдоль контура разреза;
- у вершин трещин не наблюдается не только бесконечно больших напряжений, но даже их максимальных значений.

Summary

G.N. Albaut, M.Kh. Akhmetzyanov, N.V. Kharinova. Investigation of Geometrically and Physically Nonlinear Problems of Solid Mechanics by Nonlinear Photoelasticity Method.

Geometrically and physically nonlinear problems of fracture mechanics at the large strains were investigated by nonlinear photoelasticity method. Stress and strain fields occurring under tensioning of rubber plates and strips with internal crack were obtained. The problems of plastic deformation in metals were solved by the photoelastic coating method. The examples of study of a dural strip with central crack-cut and the neck of a plane steel sample were considered. Some features of the stress and strain distribution in the geometrically and physically nonlinear problems were revealed.

Key words: fracture mechanics, crack, nonlinear photoelasticity, large strains, model of crack opening, singular elasticity, nonlinear solid mechanics.

Литература

1. *Александров А.Я., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. *Албаут Г.Н.* Нелинейная фотоупругость в приложении к задачам механики разрушения. – Новосибирск: НГАСУ, 2002. – 112 с.
3. *Черных К.Ф.* Нелинейная упругость (теория и приложения). – СПб.: Соло, 2004. – 420 с.
4. *Yunlin L.* The views on two important problems relevant to two signs of principal stress in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. – 1988. – V. 30, No 3. – P. 317-327.

Поступила в редакцию
30.03.10

Албаут Галина Николаевна – доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин).

Ахметзянов Марат Халикович – доктор технических наук, профессор Сибирского государственного университета путей сообщения (НИИЖТ).

Харинова Наталья Владимировна – кандидат технических наук, доцент Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин).

E-mail: *Novosibirsk_nata@mail.ru*